《数学大观》

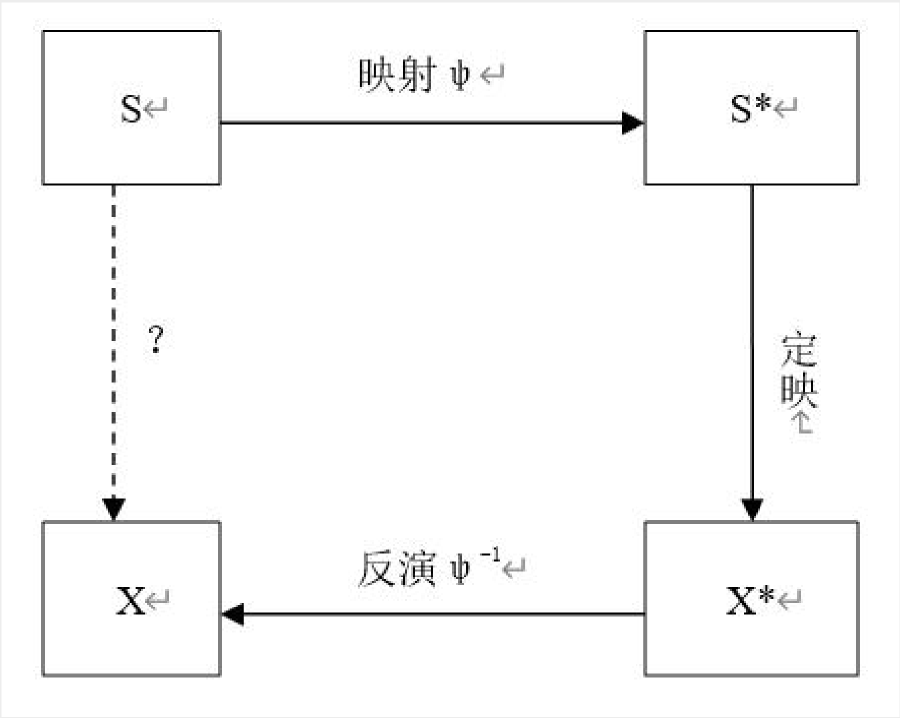
九、中国古代的盈不足算法及其方法论意义

主 讲 人 ： 青 课

关系（Relationship）、映射（Maping）、反演（Inversion）原理简称RMI原理。

RMI原理是指：

给定一个含有目标原象x的关系结构S，如果能找到一个可定映映射ψ，将S映入或映满S^*，则可从S^*通过一定的数学方法（定映手续）把目标映射$X^*=\psi(x)$确定出来，进而通过反演ψ-1又可把$x=\psi-1(x^*)$确定出来，这样，原来的问题就得到了解决。



关系

映射

定映

反演

得解

中国古算家通过两次假设与检验（如刘徽所谓的“课”），把实际应用问题构造成特定的盈、不足模式：

$$\text{假令}\begin{array}{c}\begin{bmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc}\text{盈} & \quad\text{不足}\end{array}\end{array}$$

这实际上是数学问题的一种“模式化”构造过程。

《九章算术》盈不足章的前八题，以“共买物”问题为模型，给出了各类盈不足问题求解的演算法则，盈不足问题可表达为下面的数学模型：

今有共买物，人出（钱）a_1，盈 b_1；人出（钱）a_2，不足b_2，问人数、物价各几何？

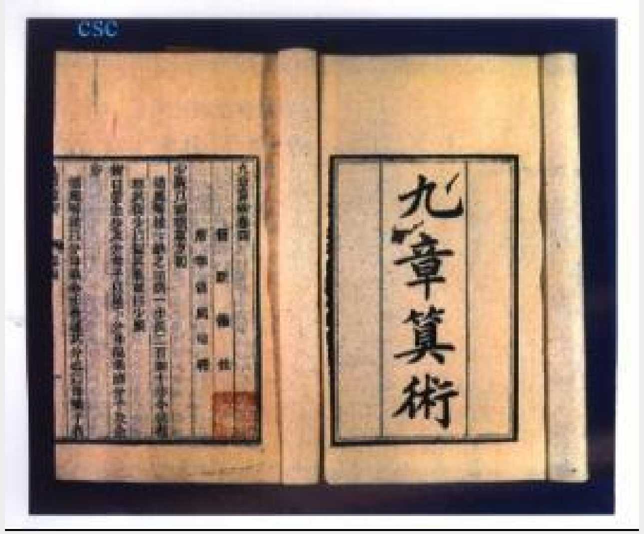
《九章算术》给出了两种盈不足术，其一为：

“置所出率，盈、不足各居其下。令维乘所出率，并，以为实。并盈、不足为法。实如法而一。有分者，通之。盈、不足相与同其买物者，置所出率，以少减多，余，以约法、实。实为物价，法为人数。”

依据造术原理，作为RMI定映手段的盈不足术的演算过程就是以齐同原理、今有术为基本内容的率的变换，是基于直线内插思想运用和机械化的算法。

《九章算术》给出了两种盈不足术，其一为：

“置所出率，盈、不足各居其下。令维乘所出率，并，以为实。并盈、不足为法。实如法而一。有分者，通之。盈、不足相与同其买物者，置所出率，以少减多，余，以约法、实。实为物价，法为人数。”



$$\text{置所出率盈、不足}\begin{bmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{维乘}} \begin{bmatrix} a_2 b_1 & a_1 b_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{相并}} \begin{bmatrix} a_2 b_1 + a_1 b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix} \text{实法}$$

$$\xrightarrow{\text{实如法而一}} \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{b_1 + b_2}$$

为每人应付的钱数

$$[a_2 b_1] \xrightarrow{\text{以少减多}} a_1 - a_2 \longrightarrow \begin{cases} \text{约实} \to \dfrac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{a_1 - a_2} \text{为物价} \\ \text{约法} \to \dfrac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2} \text{为人数} \end{cases}$$

用现代的符号来表示：设每人出a1钱，盈b1钱；每人出a2钱，不足b2钱，求物价x和人数y。依据术文得下列两个公式：

$$x=\frac{a_2b_1+a_1b_2}{a_1-a_2},y=\frac{b_1+b_2}{a_1-a_2}$$

当然我们还可以算出每人应该分摊的钱数：

$$z=\frac{x}{y}=\frac{a_2b_1+a_1b_2}{b_1+b_2}$$

盈不足

模型化方法：

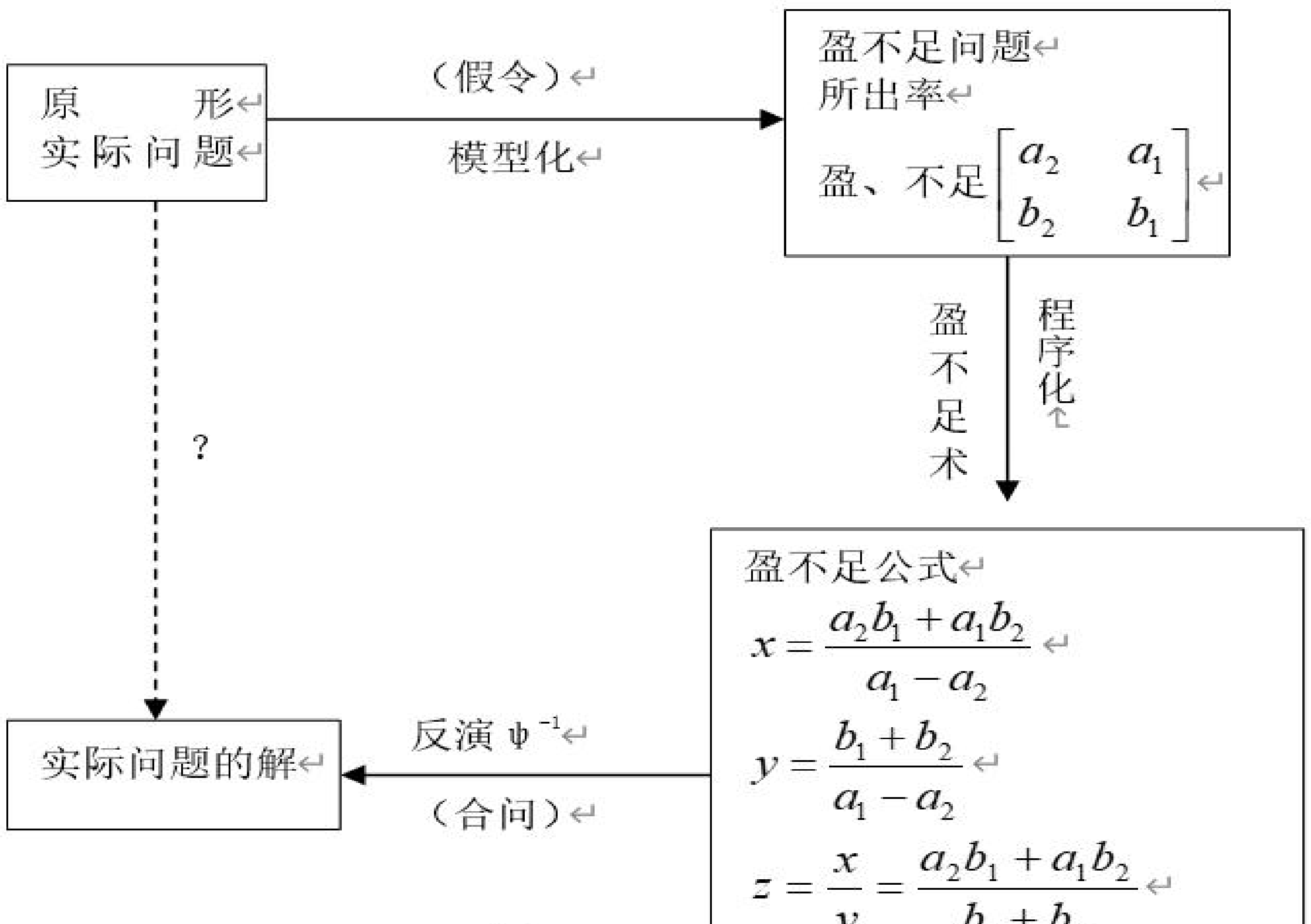


图 3 —5

例1：《九章算术》盈不足章第13题：

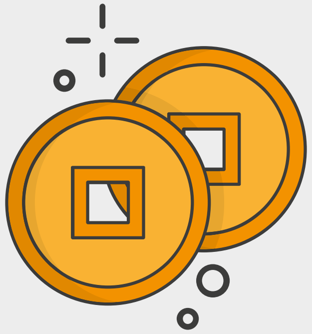
今有醇酒一斗，值钱五十；行酒一斗，值钱一十。今将钱三十，买酒二斗。问醇、行酒各几何?

本题的术文是：

假令醇酒五升，行酒一斗五升，有余一十。令之醇酒二升，行酒一斗八升，不足二。”（一斗为十升）

若把醇酒改成**每人出钱数**，本题就转化为：

今有共买物，人出（钱）五，盈一十；人出（钱）二，不足二，问每人应出多少钱?



对于醇酒，有盈不足模型：$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$

代入盈不足公式就可求得醇酒：$\dfrac{2\times10+5\times2}{10+2}=\dfrac{5}{2}$（升）

同样，对于行酒，也可得出盈不足模型：$\begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$

代入盈不足公式就可求得行酒：$\dfrac{18\times10+15\times2}{10+2}=\dfrac{25}{2}$（升）

结论：

（1）盈不足术是中国数学史上解应用问题的一种别开生面的创造，有相当重要的地位。

盈不足术还经过丝绸之路西传中亚阿拉伯国家，受到特别重视，被称为“契丹算法”，后来又传入欧洲，中世纪时期“双设法”曾长期统治了他们的数学王国。

结论：

（2）我国古代数学家在寻求数学应用问题的普遍解法的道路上，经过了长期的探索而卓有建树，中算理论在数学问题模式化与解法程序化方面不断进入更高的水平，充分显示出古代传统数学构造性与机械化的特色。

感谢聆听